Διάλεξη 12η : Πέμπτη 26 Μάη 2016, 6-9 μ.μ.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ: Το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach - Ύπαρξη λύσεων

- **ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ**
  - Μετρικοί χώροι: Ορισμοί - παραδείγματα
  - Σταθμητοί διανυσματικοί χώροι: Ορισμοί - παραδείγματα
  - Μετρικές στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $C([a,b],\Re)$

    Παραδείγματα
- Βασικές ακολουθίες σε μετρικό (σταθμητό) χώρο
- Πλήρεις μετρικοί χώροι - Χώροι Banach
- Παραδείγματα χώρων Banach
- **ΠΡΟΤΑΣΗ.** Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $C[a,b]$ εφοδιασμένο με την μετρική

  $$||x||_\infty := sup|x(t)|$$

  είναι ένας πλήρης σταθμητός χώρος.
  Απόδειξη. ΟΧΙ
- Ένας σταθμητός χώρος που δεν είναι πλήρης

Το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Ορισμός. Συστολή σε μετρικό χώρο (X,d). (Συσταλτική συνάρτηση)

Παράδειγμα συσταλτικής και όχι συστολής.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ας είναι (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Αν μια απεικόνιση $T : (X,d) \to (X,d)$ είναι συστολή, τότε η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο x_0 στο X, δηλ. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = x$.
Απόδειξη.

- Η αναδρομική ακολουθία συναρτήσεων και οι εκτιμήσεις των διαφορών είναι βασική

  $$d(x_m, x_{m-1}) \leq c^{m-1} d(x_1, x_0)$$

  και

  $$d(x_m, x_n) \leq c^{m-1} d(x_1, x_0) + ... + c^n d(x_1, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0), \quad m > n$$
- Η σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων (βασική)
- Το σταθερό σημείο του τελεστή και το μονοσήμαντο

Παρατηρήσεις

- Εκτίμηση της προσέγγισης
- Η αναγκαιότητα της πληρότητας
- Η αναγκαιότητα της συστολής

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Αν για την απεικόνιση $T : (X, d) \to (X, d)$ υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε η απεικόνιση $T^{(k)}$ να είναι συστολή, τότε η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο x_0 στο X, δηλ. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = x$.
Απόδειξη.

Παρατηρήσεις

- **Ύπαρξη λύσεων σε εξισώσεις Volterra**

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^t g(t, s, y(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

  - **ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν η συναρτήσεις f, K είναι συνεχείς τότε η εξίσωση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)y(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

    έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[a, b]$.

    Απόδειξη.

  - **ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν η συναρτήσεις f, K είναι συνεχείς και η συνάρτηση K ικανοποιεί την

$$|K(t, s, x)) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \Re$$

    τότε η εξίσωση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, y(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

    έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[a, b]$.
    Απόδειξη.

  - Σύγκριση με αποτελέσματα προηγουμένων μεθόδων
  - Αριθμητικά παραδείγματα

- **Ύπαρξη λύσεων σε εξισώσεις Fredholm** της μορφής

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b g(t, s, y(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

  - **ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν η συναρτήσεις f, K είναι συνεχείς τότε η εξίσωση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)(y(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

    έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[a, b]$, για κάθε

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a))}.$$

    .
    Απόδειξη.

– **ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν η συναρτήσεις f, K είναι συνεχείς και η συνάρτηση K ικανοποιεί την

$$|K(t,s,x)) - K(t,s,y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in \Re$$

τότε η εξίσωση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s(y(s))ds, \quad t \in [a,b].$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[a,b]$ για κάθε

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a))}.$$

Απόδειξη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{cc} x''(t) = f(t, x(t)) & t \in (a,b) \\ x(a) = A, & x(b) = B \end{array}$$

όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση που πληροί μια συνθήκη Lipschitz ως προς την δεύτερη μεταβλητή, με σταθερά K.

Η λύση του προβλήματος δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = w(t) + \int_a^b G(t,s) f(s, x(s))ds, \quad t \in [a,b],$$

όπου $G(t,s)$ είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{cc} x''(t) = 0 & t \in (a,b) \\ x(a) = 0, & x(b) = 0 \end{array}$$

και w είναι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{cc} w''(t) = 0 & t \in (a,b) \\ w(a) = A, & w(b) = B \end{array}$$

Θεωρούμε τον σταθμητό χώρο $X := C([a,b], ||\cdot||)$ και ορίζουμε τον τελεστή $T : X \to X$ και παρατηρούμε ότι ο χώρος αυτός είναι χώρος Banach.
Επίσης,

$$|G(t,s)| \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad t \in [a,b].$$

Επομένως, αν

$$(b-a)^2 < 8/K$$

τότε ο τελεστής T είναι μια συστολή στον X και συνεπώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει ακριβώς μία λύση στο X.